

Rankine–Hugoniot-Berechnungen für Nichtgleichgewichts-Plasmen

J. ARTMANN

Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e. V.,
Institut für Plasmadynamik, Stuttgart-Vaihingen

(Z. Naturforsch. 21 a, 1960–1963 [1966] ; eingegangen am 17. August 1966)

In optically thin plasmas produced by strong shock waves the SAHA equation is no longer valid to describe the conditions directly behind the shock wave. Photoionisation may be neglected in the balance of production and recombination of charged particles. For the case of nonequilibrium a calculation assuming various ratios of electron to ion temperature ($\vartheta = T_e/T$) shows that the shock wave parameters are described sufficiently well by the Korona-equation. Temperature, density ratio and electron density are increased with increasing ϑ whereas the pressure ratio is independent of the kind of equilibrium and ϑ .

In zahlreichen umfassenden Berechnungen der Plasmamaparameter unmittelbar hinter einer Stoßfront^{1–8} wurde bisher thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt. Handelt es sich jedoch bei den durch Stoßwellen erzeugten heißen Gasen um optisch dünne Plasmen, in denen mindestens die Elektronen einer MAXWELL-Verteilung gehorchen, so kann in der Bilanz zwischen der Produktion von Ladungsträgern und ihrer Rekombination die Photoionisation vernachlässigt werden^{9–12}. Diese Überlegungen führen im stationären Fall sofort auf folgende Nichtgleichgewichts-Gleichung (vgl. ¹²)

$$\frac{n^{(i)+}}{n^{(i+1)+}} = \frac{1}{S_{ai}(T_e, n_e)} + \frac{1}{K_{oi}(T_e)}, \quad (1)$$

aus der sich die im Grundzustand befindlichen Komponenten berechnen lassen, wobei

$$S_{ai}(T_e, n_e) = \frac{n^{(i+1)+}}{n^{(i)+}} = \frac{2 Z^{(i+1)+}}{n_e Z^{(i)+}} \frac{(2 \pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} \cdot \exp \left\{ -\chi^{(i)+}/k T_e \right\} \quad (2)$$

oder

$$S_{ai}(T_e, n_e) = 4,83 \cdot 10^{-15} \frac{Z^{(i+1)+}}{Z^{(i)+}} \frac{T_e^{3/2}}{n_e} \cdot \exp \left\{ -\chi^{(i)+}/k T_e \right\}$$

mit

$$n_e = \sum_{i=1}^n i \cdot n^{(i)+}$$

die bekannte SAHA-Funktion für die Elektronentemperatur T_e , und $K_{oi}(T_e)$ die Koronafunktion ist, für die sich bekanntlich¹² mit verallgemeinerten

Wirkungsquerschnitten der beiden Elementarprozesse Stoßionisation und Photorekombination^{13–16} ergibt:

$$K_{oi}(T_e) = \frac{n^{(i+1)+}}{n^{(i)+}} = \frac{6,38 \cdot 10^{-11} \exp \left\{ -\chi^{(i)+}/k T_e \right\}}{(i+1) (\chi^{(i)+})^{3/2} [0,429 + 0,5 \ln (\chi^{(i)+}/k T_e) + 0,469 (\chi^{(i)}/k T_e)^{-1/2}]} \quad (3)$$

[i = Ladungszahl der Ionen, $n^{(0,i)+}$ = Dichte der Atome und der i -fach geladenen Ionen (cm^{-3}), n_e = Elektronendichte (cm^{-3}), $\chi^{(0,i)+}$ = Ionisationspotential des Atoms bzw. i -fach geladenen Ions (erg), $Z^{(0,i)+}$ = innere Zustandssumme des Atoms und des i -fach geladenen Ions, m_e = Elektronenmasse (g),

T_e = Elektronentemperatur ($^{\circ}\text{K}$), k = BOLTZMANN-Konstante (erg/grad), h = PLANCKSches Wirkungsquantum (erg·sec)].

Da im Nichtgleichgewichtsfall die Temperatur der Ionen von der der Atome verschieden sein kann, soll in der folgenden Arbeit die Abhängigkeit eini-

¹ E. B. TURNER, Space Technology Laboratory Report, GM-TR 0165-00460 [1958].

² C. T. CHANG, Riso Report No. 17 (Juli 1961).

³ E. A. McLEAN, C. E. FANEUFF, A. C. KOLB u. H. R. GRIEM, Phys. Fluids 3, 531 [1962].

⁴ W. FÜCKS u. J. ARTMANN, Z. Phys. 172, 118 [1963].

⁵ J. ARTMANN, PPS 102, Bericht aus dem I. Physikal. Institut der Techn. Hochschule Aachen [1963].

⁶ J. ARTMANN, Z. Phys. 174, 376 [1963].

⁷ J. ARTMANN, Z. Naturforsch. 20 a, 857 [1965].

⁸ J. ARTMANN, Z. Naturforsch. 20 a, 1213 [1965].

⁹ G. ELWERT, Z. Naturforsch. 7 a, 432 [1952].

¹⁰ G. ELWERT, Z. Naturforsch. 7 a, 703 [1952].

¹¹ K.-F. KNOCH, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band XIII, 1961, 73–108.

¹² W. L. BOHN, Z. Naturforsch. 21 a, 377 [1966].

¹³ D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc. London A 267, 297 [1962].

¹⁴ M. J. SEATON, Atomic and Molecular Processes (Ed. D. R. BATES), Academic Press Inc., New York 1962.

¹⁵ M. J. SEATON, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 119, 81 [1959].

¹⁶ A. C. KOLB u. R. W. P. McWHIRTER, Phys. Fluids 7, 519 [1964].



ger Stoßwellenparameter eines Argonplasmas von den Reaktionsgleichungen und einem vorgegebenen Verhältnis zwischen der Temperatur der Elektronen und derjenigen der schweren Teilchen gezeigt werden.

I. Erweiterte Rankine-Hugoniot-Berechnungen

Bewegt sich eine starke Stoßwelle in ein ruhendes atomares Gas, so ergeben sich aus den bekannten Erhaltungssätzen der strömenden Masse, der Energie und des Impulses für das Dichteverhältnis⁵⁻⁸ in der Starke-Stoß-Approximation bei Vernachlässigung von Wärmeleitungs- und Strahlungs-Effekten innerhalb der Stoßfront

$$\eta = 2 h(\varrho/p) - 1 \quad (4)$$

und für die Stoßfrontgeschwindigkeit

$$V = \eta(p/[\eta \varrho_0(\eta - 1)])^{1/2}, \quad (5)$$

wobei von precursor-Effekten abgesehen ist (Index „0“ = Verhältnisse vor der Stoßfront, p = Druck, ϱ = Dichte, h = spezifische Enthalpie).

Vernachlässigt man in der inneren Energie des Plasmas die Strahlungseffekte und die Ionisationspotentialerniedrigung, nähert die inneren Zustandssummen der Atome und Ionen durch deren statistische Gewichte im Grundzustand an und setzt für die schweren Teilchen eine gemeinsame Masse und eine gemeinsame kinetische Temperatur T (hier kurz Ionentemperatur genannt), voraus, so erhält man für die spezifische Enthalpie einschließlich der n -ten Ionisation folgenden Ausdruck

$$h = \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{5}{2} n_e k T_e + k T \sum_{i=0}^n \left[n^{(i)+} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{k T} \sum_{k=1}^i \chi^{(k-1)+} \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

wobei die Summe $\sum \chi^{(k-1)+}$ nur für $i \geq 1$ von Null verschieden ist.

Sind Druck und Temperatur der ruhenden Gase vor der Stoßfront gegeben, so kann neben dem Dichteverhältnis (4) und der Stoßfrontgeschwindigkeit (5) auch das Druckverhältnis

$$p/p_0 = (k T \sum_{i=0}^n n^{(i)+} + n_e k T_e) / (n_0 k T_0) \quad (7)$$

für die verallgemeinerte Nichtgleichgewichts- (1), für die modifizierte SAHA- (2) und für die Korona-Gleichung (3) bei vorgegebenen $\vartheta = T_e/T$ iterativ

berechnet werden. Es wird hierbei vorausgesetzt, daß angeregte Ionen und Atome vernachlässigt werden können. Für die numerische Berechnung wurde aus Vergleichsgründen $\vartheta = 1/3$; 1 und 3 gesetzt. (Dazu sei bemerkt, daß der für Stoßwellen charakteristische Aufheizmechanismus eher $T_e \leq T$ liefert.)

II. Diskussion der Ergebnisse

Für die Auswertung wurde der Anfangsdruck mit $p_0 = 1$ Torr vorgegeben, da die Experimente, bei denen sich derart starke Stoßwellen erzeugen ließen, sicherlich im Torrbereich oder darunter arbeiten müßten.

Aus den Abb. 1 a und 1 b ist zu entnehmen, daß die Anwendung der Korona- wie der Nichtgleichgewichts-Gleichung besonders für schnellere Stoßfrontgeschwindigkeiten wesentlich höhere Temperaturen gegenüber dem thermischen Gleichgewicht liefert, da bei vernachlässigter Photoionisation die latente Wärme des Plasmas geringer ist. Das Plasma wird dann allerdings durch Strahlungsverluste sehr schnell abgekühlt werden. Die Aufspaltung als Folge der Verschiedenheit zwischen Ionen- und Elektronen-Temperatur ist verhältnismäßig gering und liefert für $\vartheta = 3$ höhere Werte als für $\vartheta = 1$ und $1/3$. Das Dichteverhältnis (vgl. Abb. 2) vergrößert sich dagegen für wachsende ϑ besonders für Stoßfrontgeschwindigkeiten $V < 2,5 \cdot 10^5$ cm/sec (erste 2 Maxima) bei allen 3 Gleichungen stark. Aus der Korona- und der Nichtgleichgewichts-Gleichung ergeben sich besonders für hohe Stoßgeschwindigkeiten für das Dichteverhältnis kleinere Werte als nach der SAHA-Gleichung. Das gleiche gilt auch für die Elektronendichte (Abb. 3 a und 3 b). Hier ist die Aufspaltung für die verschiedenen ϑ im Bereich $V < 1,5 \cdot 10^5$ cm/sec stark, während das Druckverhältnis für alle 3 Gleichungen und alle 3 ϑ -Werte im Rahmen der Auftragsgenauigkeit (Abb. 4) gleiche Kurvenwerte liefert.

Alle Abbildungen zeigen, daß die Korona- und die Nichtgleichgewichts-Gleichung besonders für größere Stoßfrontgeschwindigkeiten fast die gleichen Ergebnisse erzeugen, was in Abb. 5 z. B. für das Dichteverhältnis explizit gezeigt wird. Bedenkt man dazu die Ungenauigkeit der Wirkungsquerschnitte, so kann man sich erheblichen rechnerischen Aufwand ersparen, wenn man die Stoßwellenparameter für optisch dünne Plasmen nur nach der Korona-

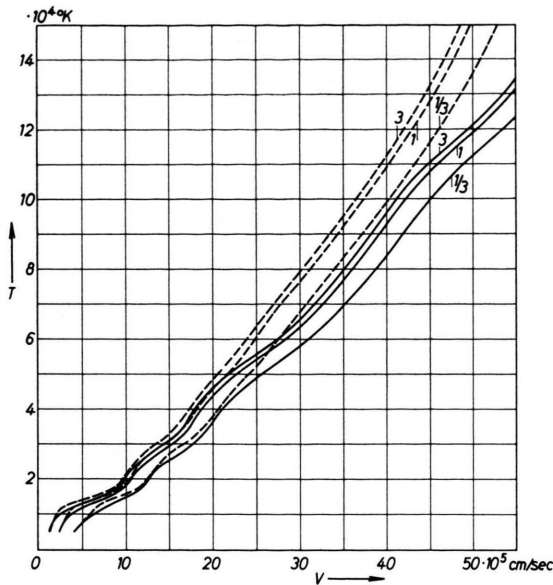


Abb. 1 a. Elektronen-Temperatur T_e in $^{\circ}\text{K}$ als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach der SAHA- (durchgezogen) und der Nichtgleichgewichts-Gleichung (gestrichelt) gerechnet, für $\vartheta = 1/3, 1$ und 3 bei $n_0 = 3,31 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

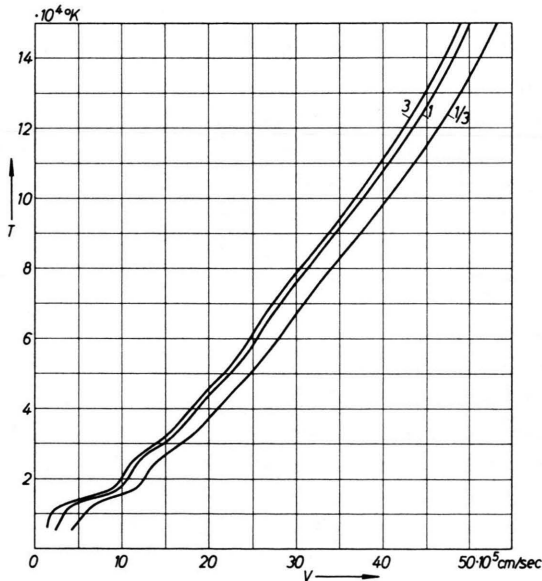


Abb. 1 b. Elektronen-Temperatur T_e in $^{\circ}\text{K}$ als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach der Korona-Gleichung gerechnet (sonst wie Abb. 1 a).

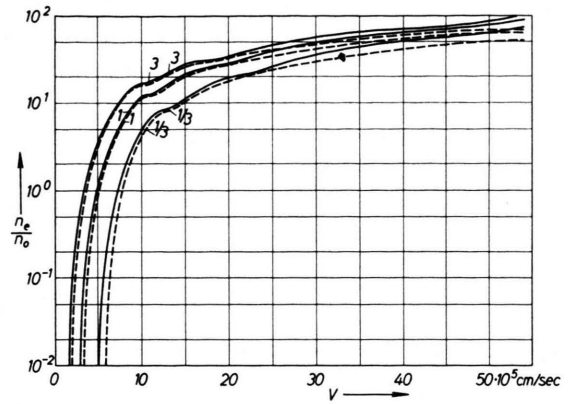
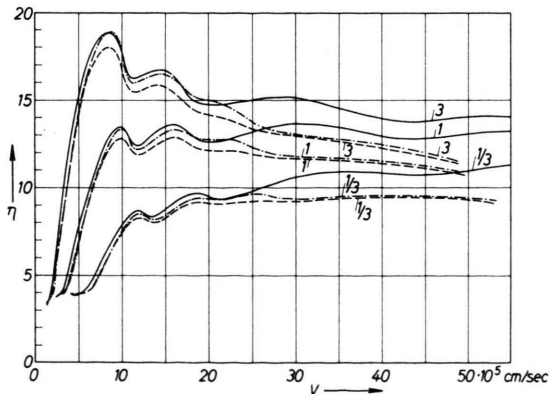


Abb. 3 a. Normierte Elektronendichte n_e/n_0 als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach der SAHA- (durchgezogen) und der Nichtgleichgewichts-Gleichung (gestrichelt) gerechnet, für $\vartheta = 1/3, 1$ und 3 bei $n_0 = 3,31 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

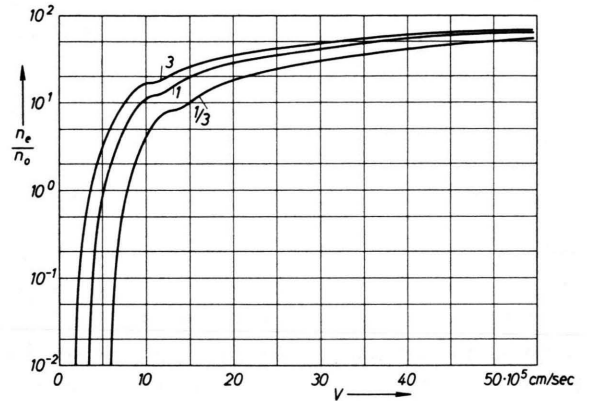


Abb. 3 b. Normierte Elektronendichte n_e/n_0 als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach der Korona-Gleichung gerechnet (sonst wie Abb. 3 a).

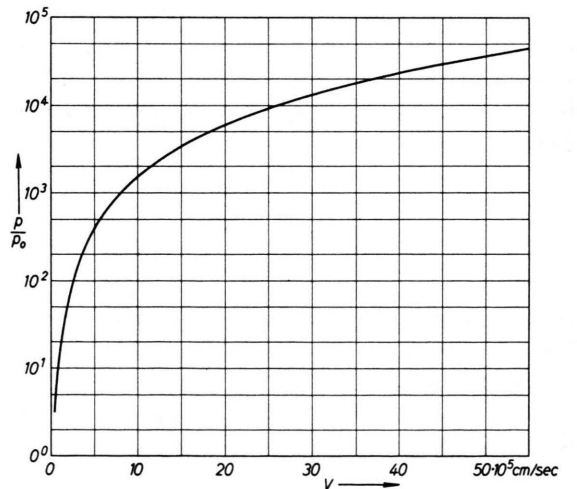


Abb. 4. Druckverhältnis p/p_0 als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach SAHA-, Nichtgleichgewichts- und Korona-Gleichung gerechnet, für $\vartheta = 1/3, 1$ und 3 bei $n_0 = 3,31 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

← Abb. 2. Dichteverhältnis η als Funktion der Stoßfrontgeschwindigkeit V in cm/sec, nach der SAHA- (durchgezogen), der Nichtgleichgewichts- (gestrichelt) und der Korona-Gleichung (strichpunktirt) gerechnet, für $\vartheta = 1/3, 1$ und 3 bei $n_0 = 3,31 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

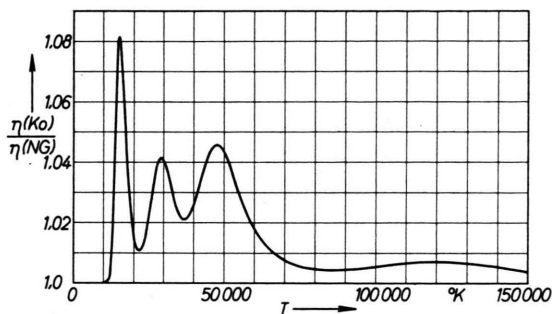


Abb. 5. Quotient der Dichteverhältnisse $\eta(Ko)/\eta(NG)$ (Korona- zu Nichtgleichgewichts-Gleichung) als Funktion der Elektronen-Temperatur T_e in $^{\circ}K$ für $\vartheta=1$ bei $n_0=3,31 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

Gleichung berechnet, da diese Gleichung druckunabhängig ist.

Die Aufspaltung des Dichteverhältnisses und der Elektronendichte für verschiedene ϑ läßt besonders im Stoßgeschwindigkeitsbereich $V < 1,5 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$ Rückschlüsse auf die Ionentemperatur zu, wenn man eine dieser beiden Größen in Abhängigkeit von der Stoßfrontgeschwindigkeit messen kann.

Eine experimentelle Entscheidung, ob das durch sehr starke Stoßwellen erzeugte Plasma mit der Korona- oder der SAHA-Gleichung beschrieben wird, könnte mit der Messung von T_e nach erfolgter Relaxation hinter einer Stoßfront bekannter Geschwindigkeit herbeigeführt werden, wie aus den Abb. 1 a und 1 b hervorgeht.

Für Drücke $p_0 < 1$ Torr treten in den Kurven die schon bekannten Verschreibungen⁴⁻⁸ ein, was sich hauptsächlich in einer Vergrößerung des Dichteverhältnisses in den Maxima bemerkbar macht.

Der Verlauf von Ionen- und Elektronentemperatur stoßwellengeheizter Plasmen auch im Zusammenhang mit Relaxations- und Strahlungsphänomenen soll in einer folgenden Arbeit behandelt werden.

Herrn STOLZ vom Rechenzentrum der DVL Südwest danke ich für die wertvolle Hilfe bei der Programmierung für die UNIVAC 1107. Den Herren HOPPE und TATTERMUSCH vom DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, bin ich für die Fertigstellung der Diagramme zu Dank verpflichtet.

Elektronen-Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen für kraftfreie bzw. teilweise kraftfreie Magnetfelder

E. MORATZ * und E. W. RICHTER

Institut für Theoretische Physik und Sternwarte der Universität Kiel

(Z. Naturforschg. 21 a, 1963—1966 [1966]; eingegangen am 15. August 1966)

Based on the VLASOV equation a method is derived to deliver velocity distributions in the case of a one-component plasma which produces a force-free or in part force-free magnetic field. This formalism is applied to simple fields of the type $\vec{H} = (H_x(z), H_y(z), 0)$.

In der Astrophysik postuliert man gelegentlich die Existenz kraftfreier Magnetfelder. Dies geschieht im allgemeinen dann, wenn ein Magnetfeld bestimmter Stärke nachgewiesen ist, eine Veränderung des Gasdrucks aber zu bislang nicht plausiblen Konsequenzen führen würde. Für solche kraftfreien Magnetfelder nimmt man — meist ohne besondere Erwähnung — ausreichende Stabilität der jeweiligen Konfiguration an. Am Beispiel des von LUNDQUIST¹ angegebenen zylindersymmetrischen Magnetfeldes zeigten VOSLAMBER und CALLEBAUT² in magneto-hydrodynamischer Näherung unter Verwendung des Energieprinzips von BERNSTEIN u. a., daß kraftfreie

Magnetfelder instabil sein können. Die Frage, ob kraftfreie Magnetfelder auch mikroinstabil sein können, wurde u. W. noch nicht diskutiert. Zu dieser Diskussion benötigt man zunächst Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen, die im ungestörten Zustand kraftfreie Magnetfelder erzeugen. Im folgenden wird eine Methode angegeben, die zur Konstruktion solcher Verteilungsfunktionen führt, und zwar bestimmen wir für kraftfreie Magnetfelder bzw. teilweise kraftfreie Magnetfelder vom Typ

$$\vec{H} = (H_x(z), H_y(z), 0) \quad (1)$$

entsprechende Verteilungsfunktionen.

* Am 12. 10. 1966 — nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit — verstarb Herr Dipl.-Phys. E. MORATZ nach kurzer Krankheit.

¹ S. LUNDQUIST, Ark. Fysik 2, 361 [1951].

² D. VOSLAMBER u. D. K. CALLEBAUT, Phys. Rev. 128, 2016 [1962].